2 Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

2 La funzione $f_1(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ è definita per $x \neq 0$; calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione nel punto di discontinuità $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{3^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{3^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty + 1} = 0.$$

Poiché i due limiti sono finiti e diversi, la funzione presenta un salto (discontinuità di prima specie) pari a 1 in $x = 0$.

Anche la funzione $f_2(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$ è definita per $x \neq 0$; calcoliamo il limite sinistro e destro della funzione nel punto di discontinuità $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0}{3^{-\infty} + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0}{3^{+\infty} + 1} = \frac{0}{+\infty + 1} = 0.$$

Poiché i due limiti sono finiti e uguali, la funzione presenta una discontinuità eliminabile (discontinuità di terza specie) in $x = 0$.