

Iperbole equilatera traslata

La curva di equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ dove i coefficienti a, b, c, d sono costanti assegnate e con $c \neq 0$ rappresenta un'iperbole equilatera traslata avente:

1. come centro di simmetria il punto $O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$
2. come asintoti le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$

Dimostrazione: basta operare una traslazione di assi che porti l'origine O in $O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$ e

l'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ diventa del tipo $XY = k$.

In questo caso le formule di traslazione che portano O in $O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$ sono:

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \frac{a}{c} \end{cases}$$

Esempio: la curva di equazione $y = \frac{2x-1}{-x+1}$

$$a = 2$$

$$b = -1$$

ha come coefficienti:

$$c = -1 \text{ (quindi } c \neq 0)$$

$$d = 1$$

Il centro di simmetria è:

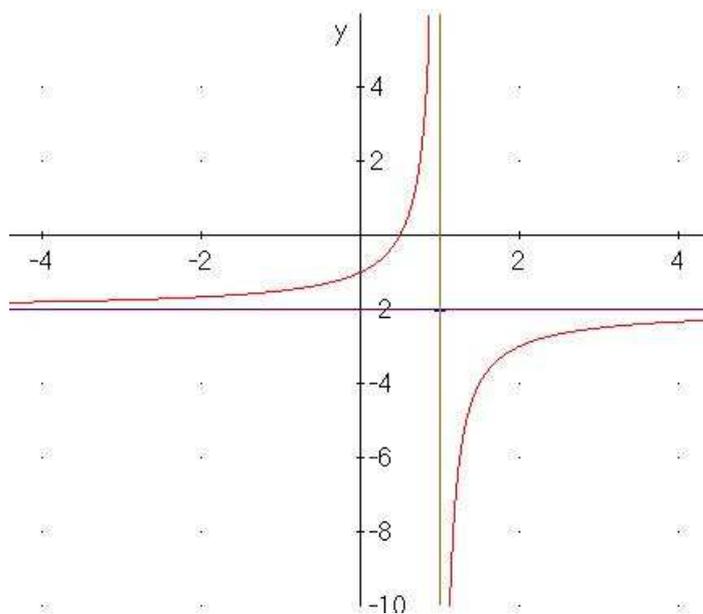
$$O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right) = (1; -2)$$

Gli asintoti sono le rette $x = -\frac{d}{c} = 1$ e

$$y = \frac{a}{c} = -2$$

Per una migliore realizzazione del disegno è opportuno trovare anche le intersezioni con

gli assi cartesiani $A \left(\frac{1}{2}; 0 \right)$ e $B = (0; -1)$



Per dimostrazione operiamo una traslazione di assi che porti l'origine O in $O' \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right) = (1; -2)$

le formule di traslazione sono:
$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} = X + 1 \\ y = Y + \frac{a}{c} = Y - 2 \end{cases}$$
 si ha: $Y - 2 = \frac{2(X+1)-1}{-(X+1)+1}$ da cui: $-X(Y-2) = 2X+1$ e

infine: $Y = -\frac{1}{X}$ che è proprio l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti nel piano XY