L’irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali

Eugene P. Wigner
Princeton University

Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XIII, 001-014 (1960)

“... and it is probable that there is some secret here which remains to be discovered”.
(C. S. Peirce)

C’è una storia di due amici, compagni alle superiori, che parlano delle loro professioni. Uno di loro è diventato uno statistico e lavora su problemi legati alle popolazioni. Egli mostra un articolo al suo vecchio compagno di classe. L’articolo inizia, come al solito, con la distribuzione gaussiana e lo statistico spiega al vecchio compagno il significato dei simboli che indicano la popolazione attuale, la popolazione media, e via dicendo. Il compagno è un po’ incredulo e non è sicuro che il compagno non lo stia in realtà prendendo in giro. “E come fai a saperlo?” gli chiede. “E cos’è quel simbolo?” “Oh,” dice lo statistico, “questo è pi greco”. “E cioè?” “Il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro”. “Beh, ora stai esagerando”, dice il compagno, “certamente la popolazione non ha nulla a che fare con la circonferenza e il cerchio”.

Naturalmente tendiamo a sorridere della semplicità dell’approccio del compagno di classe. Ciononostante, quando ho sentito questa storia, devo ammettere di aver provato una sensazione strana perché, sicuramente, la reazione del compagno di classe tradisce solo buonsenso. Mi sono sentito ancora più confuso quando, non molti giorni dopo, qualcuno venne da me ed espresse il suo sconcerto[1] circa il fatto che operiamo una selezione piuttosto ristretta quando scegliamo i dati con cui testiamo le nostre teorie. “Come sappiamo che, se concentrassimo la nostra attenzione sui fenomeni che trascuriamo e trascurassimo alcuni dei fenomeni che ora catturano la nostra attenzione, non arriveremmo ad un’altra teoria, che ha poco in comune con quella attuale ma che, nondimeno, spiega altrettanti fenomeni quanti la teoria presente?” Bisogna ammettere che non abbiamo prove evidenti che non possa esistere una tale teoria.

Le due storie sopra riportate illustrano i due punti principali che sono l’oggetto del discorso presente. Il primo punto è che i concetti matematici appaiono in connessioni completamente inattese. Inoltre, essi permettono spesso una descrizione inaspettatamente precisa ed accurata dei fenomeni in queste connessioni. In secondo luogo, solo per questa circostanza e perché non conosciamo la ragione della loro utilità, non possiamo sapere se una teoria formulata in termini di concetti matematici è l’unica ad essere appropriata. Siamo in una posizione simile a quella dell’uomo a cui viene dato un mazzo di chiavi e che, dovendo aprire diverse porte in successione, trova sempre la chiave giusta al primo o al secondo tentativo. Egli diventa scettico riguardo l’unicità della corrispondenza tra chiavi e porte.

La maggior parte delle cose che saranno dette su queste questioni non sono nuove; saranno già venute in mente, in un modo o in un altro, alla maggior parte degli scienziati. Il mio scopo principale è di illustrarle da diversi punti di vista. Il primo è che l’enorme utilità della matematica nelle scienze naturali è qualcosa che rasenta il misterioso e che non c’è per essa una spiegazione razionale. In secondo luogo, è proprio questa incredibile utilità dei concetti matematici a sollevare la questione sull’unicità delle nostre teorie fisiche. Per stabilire il primo punto, che la matematica

[1] Il commento citato è stato espresso da F. Werner quando era studente a Princeton.

gioca un ruolo irragionevolmente importante in fisica, sarà utile dire qualche parola sulla domanda "cos'è la matematica?" e quindi "cos'è la fisica", poi come la matematica entra nelle teorie fisiche e, infine, perché il successo della matematica nel suo ruolo in fisica appare così sconcertante. Molto meno sarà detto sul secondo punto: l'unicità delle teorie della fisica. Una vera e propria risposta a questa domanda richiederebbe un complesso lavoro sperimentale e teorico che non è stato finora fatto.

Cos'è la matematica?

Qualcuno una volta disse che la filosofia è l'abuso di una terminologia che è stata inventata espressamente per questo scopo[2]. In analogia, direi che la matematica è la scienza delle abili operazioni con concetti e regole inventate espressamente per questo scopo. L'enfasi principale è sull'invenzione dei concetti. La matematica finirebbe presto i teoremi interessanti se questi dovessero essere formulati in termini di concetti che appaiono già negli assiomi. Inoltre, mentre è indubitabilmente vero che i concetti della matematica elementare e in particolare della geometria elementare sono stati formulati per descrivere entità che sono direttamente suggerite dal mondo reale, lo stesso non si può dire dei concetti più avanzati, in particolare dei concetti che giocano un ruolo così importante in fisica. Perciò, le regole per le operazioni con coppie di numeri sono ovviamente progettate per dare gli stessi risultati delle operazioni con le frazioni che abbiamo imparato senza alcun riferimento alle "coppie di numeri". Le regole per le operazioni con le successioni, cioè con numeri irrazionali, ancora appartengono alla categoria delle regole che sono state determinate per riprodurre le regole per le operazioni con quantità già note. La maggior parte dei concetti matematici più avanzati, come i numeri complessi, le algebre, gli operatori lineari, gli insiemi borelliani - e questa lista potrebbe andare avanti quasi indefinitamente - è stata inventata come buoni oggetti su cui il matematico può dimostrare il suo ingegno e il suo senso di bellezza formale. In effetti, la definizione di questi concetti, con la consapevolezza che considerazioni interessanti e ingegnose possono essere applicate ad essi, è la prima dimostrazione dell'ingegno del matematico che li definisce. La profondità di pensiero che entra nella formulazione dei concetti matematici è più tardi giustificata dall'abilità con cui questi concetti vengono usati. Il grande matematico sfrutta appieno, quasi senza scrupoli, il dominio del ragionamento ammissibile e schiva quello non ammissibile. Il fatto che la sua spericolatezza non lo conduca in una palude di contraddizioni è un miracolo in se stesso: certamente è difficile credere che le nostre capacità di ragionamento siano state portate dal processo di selezione naturale darwininana alla perfezione che sembrano possedere. Comunque, questo non è il nostro punto. Il punto principale che dovrà essere richiamato più tardi è che il matematico potrebbe formulare solo una manciata di teoremi interessanti senza definire concetti ulteriori rispetto a quelli contenuti negli assiomi e che i concetti ulteriori rispetto a quelli contenuti negli assiomi vengono definiti con in vista la possibilità di operazioni logiche ingegnose che si appellano al nostro senso estetico sia come operazioni che come risultati di grande generalità e semplicità[3].

I numeri complessi forniscono un esempio particolarmente sorprendente. Certamente, nulla nella nostra esperienza suggerisce l'introduzione di queste quantità. In realtà, se si chiede a un matematico di giustificare il suo interesse nei numeri complessi, egli vi mostra, con una certa indignazione, i tanti bei teoremi della teoria delle equazioni, delle serie di potenze e delle fun-

[2]Questa affermazione è qui citata da W. Dubislav: *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart.* Junker and Dunnhaupt Verlag, Berlino, 1932, p. 1.

[3]M. Polanyi, nel suo *Personal Knowledge*, University of Chicago Press, 1958, dice: "Tutte queste difficoltà non sono che conseguenze del nostro rifiuto di vedere che la matematica non può essere definita senza riconoscere la sua più ovvia caratteristica, e precisamente che essa è interessante" (p 188).

zioni analitiche in generale, che devono la loro origine all'introduzione dei numeri complessi. Il matematico non è disposto ad abbandonare il suo interesse in questi bellissimi risultati del suo genio[4].

Cos'è la fisica?

Il fisico è interessato a scoprire le leggi della natura inanimata. Per capire questa frase, è necessario analizzare il concetto di "legge della natura".

Il mondo intorno a noi è di complessità sbalorditiva e il fatto più ovvio a proposito è che non possiamo predire il futuro. Anche se in battuta attribuiamo solo all'ottimista il punto di vista che il futuro sia incerto, l'ottimista ha ragione in questo caso: il futuro è imprevedibile. È, come Schrödinger ha notato, un miracolo che, nonostante la sbalorditiva complessità del mondo, certe regolarità negli eventi si possano scoprire. Una di tali regolarità, scoperta da Galileo, è che due pietre, lasciate cadere allo stesso istante dalla stessa altezza, raggiungono il suolo nello stesso tempo. Le leggi della natura si occupano di tali regolarità. La regolarità di Galileo è il prototipo di una ampia classe di regolarità. È una regolarità sorprendente per tre ragioni.

La prima ragione per cui è sorprendente è che è vera non solo a Pisa, e ai tempi di Galileo, è vera dappertutto sulla Terra, la è sempre stata e sempre la sarà. Questa proprietà di regolarità è una proprietà di invarianza riconosciuta e, come ho avuto modo di evidenziare qualche tempo fa, senza principi di invarianza simili a quelli implicati nella precedente generalizzazione dell'osservazione di Galileo, la fisica non sarebbe possibile. La seconda ragione è che la regolarità di cui discutiamo è indipendente da tante condizioni che potrebbero avere effetto su di essa. È valida che piova o no, che l'esperimento sia condotto in una stanza o dalla Torre Pendente, che la persona che fa cadere le pietre sia un uomo o una donna. È valida persino se le due pietre vengono lasciate cadere, simultaneamente e dalla stessa altezza, da due persone diverse. Ci sono, ovviamente, innumerevoli altre condizioni che sono del tutto irrilevanti dal punto di vista della validità della regolarità di Galileo. L'irrilevanza di così tante circostanze che potrebbero giocare un ruolo nel fenomeno osservato è stata anch'essa chiamata invarianza. Comunque, questa invarianza è di un altro tipo rispetto a quella precedente, poiché non può essere formulata come principio generale. L'esplorazione delle condizioni che influenzano e di quelle che non influenzano un fenomeno è parte dell'esplorazione sperimentale iniziale di un campo d'indagine. Sono l'abilità e l'ingegno a mostrare allo sperimentale fenomeni che dipendono solo da un insieme relativamente ristretto di condizioni realizzabili e riproducibili con relativa facilità[5]. Nel caso presente, la restrizione delle osservazioni di Galileo a corpi relativamente pesanti è il passaggio più importante, da questo punto di vista. Di nuovo, è vero che se non ci fossero fenomeni che sono indipendenti da tutto tranne che da un insieme di condizioni abbastanza piccolo da essere gestibile, la fisica sarebbe impossibile.

I due punti precedenti, anche se altamente significativi dal punto di vista del filosofo, non sono quelli che sorpresero maggiormente Galileo, né quelli che contengono una specifica legge di natura. La legge di natura è contenuta nell'affermazione che l'intervallo di tempo necessario per un oggetto pesante a cadere da una data altezza è indipendente dalle dimensioni, dal materiale e dalla forma del corpo che cade. Nel contesto della seconda "legge" di Newton, questo equivale

[4] Il lettore può essere interessato, in questo contesto, ai commenti alquanto irritati di Hilbert sull'intuizionismo che "cerca di rompere e sfigurare la matematica", Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg, vol. 157, 1922, o Gesammelte Werke, Springer, Berlino, 1935, p. 188.

[5] Si veda, in questo contesto, il chiaro saggio di M. Deutsch, Daedalus, vol. 87, 1958, pag. 86. A. Shimony ha richiamato la mia attenzione a un passaggio simile in C. S. Peirce: *Essays in the Philosophy of Science*, The Liberal Arts Press, New York, 1957, p. 237.

all'affermazione che la forza gravitazionale che agisce sul corpo che cade è proporzionale alla sua massa ma indipendente dalla forma, dal materiale e dalle dimensioni del corpo che cade.

La discussione precedente intende ricordarci, prima di tutto, che non è per nulla naturale che esistano delle "leggi di natura", e tantomeno che gli umani siano in grado di scoprirle[6]. Chi scrive ha avuto occasione, qualche tempo fa, di richiamare attenzione alla successione di strati di "leggi di natura", ciascuno strato contenente leggi più generali e comprensive del precedente, dove la scoperta di ogni strato costituisce una penetrazione più in profondità nella struttura dell'universo rispetto allo strato riconosciuto prima. Comunque, qui il punto più significativo nel contesto presente è che tutte queste leggi di natura contengono, fino alle più remote conseguenze, solo una piccola parte della nostra conoscenza del mondo inanimato. Tutte le leggi di natura sono affermazioni condizionali che permettono una predizione di alcuni eventi futuri sulla base della conoscenza del presente, tranne quegli aspetti del presente stato del mondo, in pratica la stragrande maggioranza dei determinanti del presente stato del mondo, che sono irrilevanti dal punto di vista della predizione. L'irrilevanza è intesa nel senso del secondo punto della discussione del teorema di Galileo[7].

Per quanto riguarda il presente stato del mondo, sull'esistenza della Terra su cui viviamo e su cui sono stati eseguiti gli esperimenti di Galileo, l'esistenza del Sole e di tutto ciò che lo circonda, le leggi della natura sono del tutto mute. In consonanza con questo, prima di tutto, le leggi della natura possono essere usate per predire eventi futuri solo sotto circostanze eccezionali - quando tutti i determinanti rilevanti dello stato presente del mondo sono noti. Ed è sempre in consonanza con questo che la costruzione di macchine, il funzionamento delle quali egli può prevedere, costituisce il più spettacolare risultato del fisico. In queste macchine, il fisico crea una situazione in cui tutte le coordinate rilevanti sono conosciute in modo tale che il comportamento della macchina può essere previsto. I radar e i reattori nucleari sono esempi di tali macchine.

Lo scopo principale della discussione precedente è di evidenziare che le leggi della natura sono tutte affermazioni condizionali e che esse si riferiscono solo a una piccolissima parte della nostra conoscenza del mondo. Perciò, la meccanica classica, che è il prototipo meglio conosciuto di teoria fisica, dà le derivate seconde delle coordinate posizionali di tutti i corpi sulla base della conoscenza delle posizioni, etc., di tali corpi. Non dà informazioni sull'esistenza, sulle posizioni o velocità attuali di tali corpi. Bisognerebbe dire, per essere precisi, che abbiamo scoperto circa trent'anni fa che nemmeno le affermazioni condizionali possono essere completamente precise: che le affermazioni condizionali sono leggi di probabilità che ci permettono solo di piazzare scommesse intelligenti su proprietà future del mondo inanimato, basandoci sulla conoscenza dello stato presente. Non ci permettono di fare affermazioni categoriche, nemmeno affermazioni categoriche condizionate allo stato presente del mondo. La natura probabilistica delle "leggi di natura" si manifesta anche nel caso delle macchine, e può essere verificata, almeno nel caso dei reattori nucleari, se le si opera a energie molto basse. Comunque, la limitazione aggiuntiva rispetto all'applicabilità delle leggi di natura[8] che segue dalla loro natura probabilistica non gioca alcun ruolo nel resto della discussione.

[6] E. Schrödinger, nel suo *What Is Life?*, Cambridge University Press, 1945), dice che questo secondo miracolo può cadere ben oltre l'umana comprensione (p. 31).

[7] Chi scrive è sicuro che non sia necessario menzionare che il teorema di Galileo, come espresso nel testo, non esaurisce il contenuto delle osservazioni di Galileo relative alle leggi dei corpi in caduta libera.

[8] Si veda ad esempio Schrödinger, rif. 1.

Il ruolo della matematica nelle teorie fisiche

Ora che ci siamo rinfrescati la mente sull'essenza della matematica e della fisica, dovremmo essere in una posizione migliore per rivedere il ruolo della matematica nelle teorie fisiche.

Naturalmente, usiamo la matematica nella fisica quotidiana per valutare il risultato delle leggi della natura, per applicare le affermazioni condizionali alle particolari condizioni che si verificano in prevalenza o che ci interessano. Affinché questo sia possibile, le leggi della natura devono essere formulate già in linguaggio matematico. Comunque, il ruolo di valutazione delle conseguenze di teorie già stabilite non è il più importante ruolo della matematica in fisica. La matematica, o piuttosto, la matematica applicata, non è tanto la padrona della situazione in questa posizione: serve puramente come uno strumento.

La matematica gioca, comunque, anche un ruolo sovrano in fisica. Questo era già implicito nell'affermazione, fatta discutendo il ruolo della matematica applicata, a proposito delle leggi della natura che devono essere formulate in linguaggio matematico per essere oggetto d'uso della matematica applicata. L'affermazione che le leggi della natura sono scritte in linguaggio matematico risale propriamente a trecento anni fa[9]; è ora più vera che mai. Per mostrare l'importanza che i concetti matematici rivestono nella formulazione delle leggi della fisica, ricordiamo, come esempio, gli assiomi della meccanica quantistica come sono stati formulati esplicitamente dal grande fisico Dirac. Ci sono due concetti base nella meccanica quantistica: gli stati e le osservabili. Gli stati sono vettori dello spazio di Hilbert, le osservabili sono operatori autoaggiunti su tali vettori. I possibili valori delle osservazioni sono gli autovalori di tali operatori - ma fermiamoci qui per non entrare in una lista di concetti matematici sviluppati dalla teoria degli operatori lineari.

È vero, naturalmente, che la fisica sceglie certi concetti matematici per la formulazione delle leggi della natura, e sicuramente solo una frazione di tutti i concetti matematici viene usata in fisica. È anche vero che i concetti scelti non sono stati scelti arbitrariamente da una lista di termini matematici, ma sono stati sviluppati, in molti se non nella maggior parte dei casi, indipendentemente dal fisico e quindi riconosciuti come già concepiti precedentemente da un matematico. Non è vero, comunque, ciò che spesso si afferma, che questo accade perché la matematica usa i concetti più semplici possibili e che questi devono ritrovarsi in qualunque formalismo. Come abbiamo visto prima, i concetti della matematica non vengono scelti per la loro semplicità concettuale - persino le successioni di coppie di numeri sono ben lontane dall'essere tra i concetti più semplici - ma per la loro duttilità a intelligenti manipolazioni e a sorprendenti e brillanti argomentazioni. Non dimentichiamo che lo spazio di Hilbert della meccanica quantistica è lo spazio di Hilbert complesso, dotato di un prodotto scalare hermitiano. Sicuramente per la mente non coinvolta, i numeri complessi sono lontani dal naturale o dal semplice e non possono essere suggeriti dall'osservazione della natura. Inoltre, l'uso dei numeri complessi non è in questo caso un trucchetto computazionale della matematica applicata ma viene quasi come una necessità della formulazione delle leggi della meccanica quantistica. Infine, inizia ora ad apparire che non solo i numeri complessi, ma anche le cosiddette funzioni analitiche sono destinate a giocare un ruolo decisivo nella formulazione della meccanica quantistica, e mi riferisco alla teoria che si sta sviluppando rapidamente delle relazioni di dispersione.

È difficile evitare l'impressione di trovarci di fronte a un miracolo qui, del tutto simile nella sua natura sorprendente al miracolo della mente umana che può concatenare un migliaio di ragionamenti insieme senza cadere in contraddizioni, o i due miracoli dell'esistenza delle leggi della natura e della mente umana capace di divinarle. L'osservazione che più si avvicina tra quelle che conosco alla spiegazione della messe di concetti matematici in fisica è l'affermazione di Einstein che le uniche teorie fisiche che siamo orientati ad accettare sono quelle belle. Rimane da vedere

[9] Si attribuisce a Galileo.

se i concetti della matematica, che invitano l'esercizio di tanta arguzia, abbiano la qualità della bellezza. Comunque, l'osservazione di Einstein può al massimo spiegare proprietà di teorie a cui siamo disposti a credere e non fa riferimento all'accuratezza intrinseca delle teorie. Dovremo, perciò, rivolgerci a quest'ultima questione.

Il successo delle teorie fisiche è davvero sorprendente?

Una possibile spiegazione dell'uso della matematica da parte del fisico nel formulare le leggi della natura è che questi sia una persona in qualche modo irresponsabile. Di conseguenza, quando trova una connessione tra due quantità che assomiglia a una connessione ben nota dalla matematica, egli salta alla conclusione che si tratta di una connessione matematica semplicemente perché non ne conosce altre. Non è intenzione della presente discussione confutare l'accusa che il fisico sia una persona in qualche modo irresponsabile. Forse lo è. Comunque, è importante notare che la formulazione matematica dell'esperienza spesso grezza del fisico porta in un incredibile numero di casi a una descrizione meravigliosamente accurata di una larga classe di fenomeni. Questo mostra che il linguaggio matematico ha più raccomandazioni del solo essere l'unico linguaggio che sappiamo parlare; mostra che esso è, in un senso molto reale, il linguaggio corretto. Consideriamo qualche esempio.

Il primo esempio è quello spesso citato del moto planetario. Le leggi dei gravi furono ben consolidate a seguito di esperimenti compiuti principalmente in Italia. Questi esperimenti non potevano essere molto accurati nel senso in cui intendiamo l'accuratezza oggi, in parte per l'effetto della resistenza dell'aria e in parte per l'impossibilità, a quel tempo, di misurare brevi intervalli di tempo. Ciononostante, non è sorprendente che, come risultato dei loro studi, gli scienziati naturali italiani acquistassero una certa familiarità con i modi in cui gli oggetti si muovono nell'atmosfera. Fu Newton a mettere in relazione la legge dei corpi in caduta libera con il moto della Luna, a notare che la traiettoria parabolica descritta dalla pietra lanciata sulla Terra e la traiettoria della Luna nel cielo sono casi particolari dello stesso oggetto matematico, un'ellisse, e a postulare la legge di gravitazione universale sulla base di una singola, e a quel tempo molto approssimativa, coincidenza numerica. Filosoficamente, la legge di gravitazione come formulata da Newton suscitava resistenze tra i contemporanei e persino in lui stesso. Empiricamente, era basata su osservazioni molto scarse. Il linguaggio matematico in cui era formulata conteneva il concetto di derivata seconda, e chi di noi ha provato a disegnare un cerchio osculatore a una curva sa che la derivata seconda non è un concetto molto immediato. La legge di gravità che Newton con riluttanza stabilì e che poteva verificare con un'accuratezza di circa il 4% si è mostrata accurata a meno di un decimillesimo di punto percentuale ed è diventata così strettamente associata al concetto di accuratezza assoluta che solo recentemente i fisici sono tornati ad essere abbastanza sfacciati da indagare sui limiti della sua accuratezza[10]. Certamente, l'esempio della legge di Newton, citato più e più volte, dev'essere menzionato per primo come esempio monumentale di legge, formulata in termini che appaiono semplici al matematico, che si è dimostrata accurata oltre qualunque ragionevole attesa. Ricapitoliamo la nostra tesi su questo esempio: primo, la legge, in modo particolare perché vi appare una derivata seconda, è semplice solo per il matematico, non per il buonsenso o per la matricola sprovvista di mentalità matematica; secondo, è una legge condizionale di applicazione molto limitata. Non spiega nulla della Terra che attrae le pietre di Galileo, o della forma circolare dell'orbita lunare, o dei pianeti intorno al Sole. La spiegazione di queste condizioni iniziali è lasciata al geologo e all'astronomo, e loro ci faticano parecchio.

Il secondo esempio è quello della meccanica quantistica ordinaria, elementare. Questa ebbe origine quando Max Born notò che alcune delle regole di calcolo, date da Heisenberg, erano

[10]Si veda, per esempio, R. H. Dicke, American Scientist, vol. 25, 1959.

formalmente identiche alle regole di calcolo con le matrici, stabilite molto tempo prima dai matematici. Born, Jordan e Heisenberg allora proposero di sostituire con matrici le variabili posizionali e di momento delle equazioni della meccanica classica. Applicarono le regole della meccanica matriciale ad alcuni problemi altamente idealizzati e i risultati furono del tutto soddisfacenti. Comunque non c'era, a quel tempo, alcuna evidenza razionale che la loro meccanica matriciale si sarebbe dimostrata corretta in condizioni più realistiche. In realtà, dicevano: "se la meccanica qui proposta dovesse essere corretta nei suoi tratti essenziali". In effetti, la prima aplicazione della loro meccanica a un problema realistico, quello dell'atomo di idrogeno, fu data diversi mesi più tardi, da Pauli. Questa applicazione diede risultati in accordo con l'esperienza. Questo fu soddisfacente ma ancora comprensibile perché le regole di calcolo di Heisenberg erano state astratte da problemi che includevano la vecchia teoria dell'atomo di idrogeno. Il miracolo accadde solo quando la meccanica matriciale, o una teoria matematicamente equivalente ad essa, fu applicata a problemi per cui le regole di calcolo di Heisenberg non avevano senso. Le regole di Heisenberg presupponevano che le equazioni classiche del moto avessero soluzioni con certe proprietà di periodicità; e le equazioni del moto dei due elettroni dell'atomo di elio, o del maggior numero di elettroni di atomi più pesanti, semplicemente non avevano tali proprietà, cosicché le regole di Heisenberg non potevano applicarsi a tali casi. Ciononostante, il calcolo del livello energetico più basso dell'elio, come compiuto pochi mesi fa da Kinoshita a Cornell e da Bazley al Bureau degli Standard, è in accordo con i dati sperimentali entro l'accuratezza delle osservazioni, che è di una parte su dieci milioni. Certamente in questo caso abbiamo "tirato fuori" dalle equazioni qualcosa che non vi avevamo già messo dentro.

Lo stesso è vero delle caratteristiche qualitative degli "spettri complessi", cioè degli spettri degli atomi più pesanti. Voglio ricordare una conversazione con Jordan, che mi disse, quando le caratteristiche qualitative degli spettri furono derivate, che un disaccordo tra le regole derivate dalla teoria quantomeccanica e le regole stabilite dalla ricerca empirica sarebbe stata l'ultima opportunità per operare un cambio di prospettiva nel contesto della meccanica matriciale. In altri termini, Jordan sentiva che saremmo stati senza risorse, almeno temporaneamente, nel caso un disaccordo inatteso si fosse verificato nella teoria dell'atomo di elio. Questa teoria è stata sviluppata, a suo tempo, da Kellner e da Hilleraas. Il formalismo matematico era troppo caro e immutabile, tanto che, se il miracolo dell'elio sopra menzionato non si fosse verificato, saremmo stati di fronte a una vera e propria crisi. Certamente, la fisica avrebbe superato tale crisi, in un modo o nell'altro. È vero, d'altra parte, che la fisica come la conosciamo oggi non sarebbe possibile senza un continuo ricorso a miracoli simili a quelli dell'atomo di elio, che è forse il più evidente miracolo avvenuto nel corso dello sviluppo della meccanica quantistica elementare, ma assolutamente non l'unico. In effetti, il numero di miracoli analoghi è limitato, dal nostro punto di vista, solo dalla nostra voglia di cercarli. La meccanica quantistica ha, comunque, molti successi quasi ugualmente notevoli che ci hanno portato alla ferma convinzione che essa sia, come diciamo, corretta.

L'ultimo esempio è quello della elettrodinamica quantistica, o la teoria del Lamb shift. Mentre la teoria della gravitazione newtoniana ha ancora connessioni ovvie con l'esperienza, l'esperienza è entrata nella formulazione della meccanica matriciale solo nella forma raffinata o sublimata delle prescrizioni di Heisenberg. La teoria quantistica del Lamb shift, come concepita da Bethe e codificata da Schwinger, è una teoria puramente matematica e il solo contributo diretto dell'esperimento fu quello di verificare l'esistenza di un effetto misurabile. L'accordo con il calcolo è migliore di una parte su mille.

I precedenti tre esempi, che potrebbero essere moltiplicati quasi indefinitamente, dovrebbero illustrare la appropriatezza e l'accuratezza della formulazione matematica delle leggi di natura in termini di concetti scelti per la loro manipolabilità, avendo le "leggi di natura" una precisione quasi fantastica ma un'applicabilità strettamente limitata. Propongo di riferirmi all'osservazione che questi tre esempi illustrano come alla legge empirica della epistemologia. Insieme con le leggi di invarianza delle teorie fisiche, essa è un fondamento indispensabile di tali teorie. Senza le leggi di invarianza le teorie fisiche potrebbero non avere fondamenti di fatto; se la legge empirica dell'epistemologia non fosse corretta, non avremmo l'incoraggiamento e l'assicurazione, che sono necessità emotive, senza cui le "leggi di natura" non avrebbero potuto essere esplorate con successo. Il Dr. R. G. Sachs, con cui ho discusso la legge empirica dell'epistemologia, l'ha chiamata un articolo di fede del fisico teorico, e la è certamente. Comunque, ciò che egli ha chiamato il nostro articolo di fede può ben essere supportato da esempi reali - molti esempi, oltre ai tre che sono già stati menzionati.

L'unicità delle teorie della fisica

La natura empirica della precedente osservazione mi pare evidente di per sé. Certamente non è una "necessità di pensiero" e non dovrebbe essere necessario, al fine di mostrarlo, evidenziare il fatto che si applica solo a una parte molto piccola della nostra conoscenza del mondo inanimato. È assurdo credere che l'esistenza di espressioni matematicamente semplici per la derivata seconda della posizione è evidente di per sé, quando non esistono espressioni simili per la posizione stessa o per la velocità. È perciò soprendente quanto prontamente il meraviglioso dono contenuto nella legge empirica dell'epistemologia sia stata dato per scontato. L'abilità della mente umana di formare una catena di mille conclusioni e continuare ad essere nel "giusto", menzionata prima, è un dono simile.

Qualunque legge empirica ha la inquietante qualità che non se ne conoscono le limitazioni. Abbiamo visto che ci sono regolarità negli eventi del mondo intorno a noi che possono essere formulate in termini di concetti matematici con una incredibile accuratezza. Ci sono, d'altra parte, aspetti del mondo rispetto ai quali non crediamo nell'esistenza di una qualunque regolarità accurata. Chiamiamo questi "condizioni iniziali". La questione che si presenta è se le diverse regolarità, cioè le varie leggi di natura che saranno scoperte, si fonderanno in una singola unità coerente, o almeno si avvicineranno asintoticamente a tale fusione. In alternativa, è possibile che ci saranno sempre alcune leggi di natura che non hanno nulla in comune con altre. Al momento questo è vero per esempio per le leggi dell'ereditarietà e della fisica. È persino possibile che alcune leggi di natura siano in conflitto tra loro nelle loro implicazioni, ciascuna però abbastanza convincente nel suo proprio dominio così che non siamo disposti ad abbandonarne alcuna. Possiamo rassegnarci a un tale stato di cose o il nostro interesse nel risolvere il conflitto tra le varie teorie può sfumare fino a scomparire. Possiamo perdere interesse nella "verità ultima", cioè, in un quadro che sia una fusione coerente in una singola unità dei quadri più piccoli, formati sui vari aspetti della natura.

Può essere utile illustrare le alternative con un esempio. Abbiamo ora, in fisica, due teorie di grande potenza ed interesse: la teoria dei fenomeni quantistici e la teoria della relatività. Queste due teorie hanno le loro radici in gruppi mutuamente esclusivi di fenomeni. La teoria della relatività si applica a corpi macroscopici, come le stelle. L'evento della coincidenza, cioè, in ultima analisi della collisione, è l'evento primitivo della teoria della relatività e definisce un punto nello spazio-tempo, o almeno definirebbe un punto se le particelle che collidono fossero infinitamente piccole. La teoria quantistica ha le sue radici nel mondo microscopico e, dal suo punto di vista, l'evento della coincidenza, o della collisione, anche se ha luogo tra particelle di nessuna estensione spaziale, non è primitivo e per nulla isolato nettamente nello spazio-tempo. Le due teorie operano con concetti matematici diversi - lo spazio quadridimensionale di Riemann e lo spazio infinito-dimensionale di Hilbert, rispettivamente. Finora, le due teorie non hanno potuto essere unite, cioè non esiste alcuna formulazione matematica di cui entrambe le teorie sono approssimazioni. Tutti i fisici credono che un'unione di queste due teorie sia inerentemente possibile e che la troveremo. Ciononostante, è anche possibile immaginare che nessuna unione delle due teorie possa essere trovata. Questo esempio illustra le due possibilità, dell'unione e del conflitto, menzionate prima, entrambe concepibili.

Al fine di ottenere un'indicazione su quale alternativa aspettarci alla fine, possiamo fingere di essere un po' più ignoranti di quanto non siamo in realtà e metterci a un livello più basso di conoscenza di quanta non ne possediamo attualmente. Se possiamo trovare una fusione delle nostre teorie su questo livello più basso di intelligenza, possiamo con fiducia aspettarci che troveremo una fusione delle nostre teorie anche al nostro reale livello di intelligenza. D'altra parte, se arrivassimo a teorie mutuamente contraddittorie a un livello un po' più basso di conoscenza, la possibilità della permanenza del conflitto tra le teorie non può essere escluso nemmeno per noi. Il livello di conoscenza e di ingegno è variabile con continuità ed è inverosimile che una variazione relativamente piccola di questa variabile continua cambi il quadro ottenibile del mondo da incoerente a coerente[11]. Considerato da questo punto di vista, il fatto che alcune teorie che conosciamo come false diano risultati di tale sorprendente accuratezza è un fattore avverso. Se avessimo un po' meno conoscenza, il gruppo di fenomeni che queste teorie "false" spiegano ci apparirebbero abbastanza largo per "dimostrare" tali teorie. Comunque queste teorie sono considerate "false" da noi proprio per la ragione che esse sono, in ultima analisi, incompatibili con quadri più comprensivi e, se si scopre un numero sufficientemente ampio di tali teorie false, esse dovranno anche trovarsi in conflitto reciproco. In modo analogo, è possibile che le teorie che consideriamo "dimostrate" da un numero di conferme numeriche che ci sembra essere abbastanza grande, siano false perché sono in conflitto con una teoria possibile più comprensiva che si trova oltre i nostri mezzi di scoperta. Se questo fosse vero, dovremmo aspettarci conflitti tra le nostre teorie non appena il loro numero crescesse oltre un certo punto e non appena esse arrivassero a coprire un numero sufficientemente grande di gruppi di fenomeni. In contrasto con l'articolo di fede del fisico teorico menzionato prima, questo è l'incubo del teorico.

Consideriamo alcuni esempi di teorie "false" che danno, in virtù della loro falsità, descrizioni allarmantemente accurate di gruppi di fenomeni. Con un po' di buona volontà, si possono trascurare alcune delle prove che questi esempi forniscono. Il successo delle prime e pionieristiche idee di Bohr sull'atomo è sempre stato piuttosto ristretto, e lo stesso si può dire degli epicicli di Tolomeo. Il nostro presente punto di vista dà una descrizione accurata di tutti i fenomeni che queste teorie più primitive possono descrivere. Lo stesso non si può più dire della cosiddetta teoria dell'elettrone libero, che dà un quadro meravigliosamente accurato di molte, se non della maggior parte delle, proprietà dei metalli, dei semiconduttori e degli isolanti. In particolare, essa spiega il fatto, mai propriamente compreso sulla base della "teoria reale", che gli isolanti mostrano una resistività che può essere 10^{26} volte maggiore di quella dei metalli. In effetti, non c'è un'evidenza sperimentale che la resistenza non sia infinita sotto le condizioni in cui la teoria dell'elettrone libero ci porterebbe ad aspettarci una resistenza infinita. Ciondimeno, siamo convinti che la teoria dell'elettrone libero sia una rozza approssimazione che dev'essere sostituita, nella descrizione di tutti i fenomeni che riguardano i solidi, da un quadro più accurato.

Se vista dal nostro punto di vista reale, la situazione presentata dalla teoria dell'elettrone libero è irritante, ma non è verosimile che prefiguri alcuna incoerenza insormontabile per noi. La teoria dell'elettrone libero solleva dubbi su quanto dobbiamo fidarci dell'accordo numerico tra teoria ed esperimento come misura della correttezza della teoria. Siamo abituati a tali dubbi.

[11] Questo passaggio è stato scritto con una grande dose di esitazione. Chi scrive è convinto che sia utile, in discussioni epistemologiche, abbandonare l'idealizzazione che il livello dell'intelligenza umana abbia una posizione singolare su una scala assoluta. In alcuni casi può essere persino utile considerare i risultati ottenibili al livello di intelligenza di qualche altra specie. In ogni caso, chi scrive si rende anche conto che il suo pensiero lungo le linee indicate nel testo è troppo conciso e non soggetto a una sufficiente revisione critica per essere affidabile.

Una situazione più difficile e confusa si presenterebbe se potessimo, un giorno, stabilire una teoria dei fenomeni della coscienza, o della biologia, che fossero coerenti e convincenti quanto le teorie presenti del mondo inanimato. Le leggi dell'ereditarietà di Mendel e il successivo lavoro sui geni può benissimo formare l'inizio di tale teoria, per quanto riguarda la biologia. Inoltre, è del tutto possibile che si trovi un'argomentazione astratta che mostri un conflitto tra tale teoria e i principi accettati della fisica. L'argomentazione potrebbe essere di natura così astratta da rendere impossibile risolvere il conflitto in favore di una o dell'altra teoria, per mezzo di un esperimento. Tale situazione metterebbe in grande tensione la nostra fede nelle nostre teorie e nella nostra credenza nella realtà dei concetti che ci formiamo. Ci darebbe un senso di profonda frustrazione nella nostra ricerca di ciò che ho chiamato "la verità ultima". La ragione per cui tale situazione è concepibile è che, fondamentalmente, non sappiamo perché le nostre teorie funzionano così bene. Perciò, la loro accuratezza non può dimostrare la loro veridicità e la loro coerenza. In effetti, chi scrive crede che qualcosa di molto simile alla situazione descritta sopra esista se le attuali leggi dell'ereditarietà e della fisica sono messe a confronto.

Voglio terminare su una nota più allegra. Il miracolo dell'appropriatezza del linguaggio della matematica per la formulazione delle leggi della fisica è un dono meraviglioso che né comprendiamo né meritiamo. Dovremmo essere grati per esso e sperare che esso rimanga valido nella ricerca futura e che si estenderà, nel bene e nel male, a nostro piacere, anche se anche per il nostro sconcerto, ad ampi rami della conoscenza.

Chi scrive vuole qui registrare il suo debito nei confronti del Dr. M. Polanyi, che, molti anni fa, ha profondamente influenzato il suo pensiero in tema di epistemologia, e nei confronti di V. Bargmann la cui critica amichevole ha avuto un ruolo importante nell'ottenere quanta chiarezza è stato in grado di ottenere. Chi scrive ha anche un debito nei confronti di A. Shimony per la revisione del presente articolo e per aver richiamato la sua attenzione ai lavori di C. S. Peirce.

Bibliografia

1. Schrödinger, E., *Über Indeterminismus in der Physik*, J. A. Barth, Leipzig 1932; anche Dubislav, W., *Naturphilosophie*, Junker und Dünnhaupt, Berlin, 1933, cap. 4.

2. Wigner, E. P., *Invariance in Physical theory*, Proc. Amer. Philos. Soc., Vol. 93, 1949.

3. Wigner, E. P., *The limits of science*, Proc. Amer. Philos. Soc., Vol. 94, 1950, pp. 422; anche Margenau, H., *The Nature of Physical Reality*, McGraw-Hill, New York, 1950, Chap. 8. pp. 521-526.

4. Dirac, P. A. M., *Quantum Mechanics*, 3rd Edit., Clarendon Press, Oxford, 1947.

5. von Neumann, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932. English translation, Princeton Univ. Press, 1955.

6. Born, M. e Jordan, P., *On quantum mechanics*, Zeits. f. Physik, No. 34, 1925, pp. 858-888. Born, M., Heisenberg, W., e Jordan, P., *On quantum mechanics*, Part II, Zeits. f. Physik, No. 35, 1926, pp. 557-615. (La frase citata appare nel secondo articolo, pag 558.)

Ricevuto in giugno, 1959.